En Note til et vanskeligt Punkt i Laplaces «Théorie analytique des Probabilités». Paris 1814.

Af

Camillo Tychsen.

I det ovenfor citerede Værk pag. 225 findes en Spilleropgave, som oversat paa dansk lyder saaledes:

To Spillere A og B, af hvilke den første ejer a Jetons, den anden b Jetons, have de respektive Sandsynligheder p og q for at vinde et enkelt Spil. Den, som taber, betaler 1 Jetons til sin Modstander, og Partiet ophører, naar enten A eller B har tabt alle sine Jetons.

Der spørges om Sandsynligheden for, at den ene af Spillerne t. Ex. A vil vinde Partiet før eller ved det $n$te Spil.

Denne Opgave har Laplace behandlet analytisk ved Hjælp af genererende Funktioner, og efter en Udvikling, som i sine Enkeltheder er i høi Grad vanskelig at gjennemtrænge, udtrykkes Problemets almindelige Løsning ved et Resultat, som i nærværende Afhandling, er anført under Mærket (30).

Af Sandsynlighedsregningens Historie fremgaaer imidlertid, at dette Problem allerede har været undersøgt af Montmort, Nicolai Bernoulli og de Moivre. Senere for omtrent hundrede Aar tilbage i Tiden har Lagrange i en Afhandling om recurrente

Rækker, som findes i Berliner Academiets Memoirer for Aaret 1775, givet to høist forskjellige Løsninger af et Spillerproblem, om hvilket Forfatteren i en vedføiet Slutningsanmærkning siger :

«Le Problem précédent revient à celui qui concerne la durée des parties que l'on joue en rabattant, et dont Mrs. Montmort, Nic. Bernouilli et de Moivre se sont occupés.»

Den sidste af disse to Løsninger er især ret mærkelig derved, at den gjennem en forholdsvis let tilgjængelig Udvikling leder til et Resultat, der i Formen har nogen Lighed med det ovenfor omtalte, som Laplace har fundet ved Anvendelsen af genererende Funktioner.

Denne Omstændighed har bragt mig til nærmere at undersøge det omhandlede Problem hos Laplace, og da jeg ved at integrere Problemets Differensligning efter Lagranges Methode er bleven ledet til nøiagtig det samme Resultat som Laplace, har jeg troet, at den efterfølgende Meddelelse, som indeholder Hovedtrækkene af denne Undersøgelse, maatte egne sig til Optagelse i Oversigterne over det kgl. danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger som en Note til et vanskeligt Punkt i Laplaces berømte Værk «Théorie analytique des Probabilités.»

Endvidere skal jeg endnu kun bemærke, at jeg gjennem en dobbelt Løsning af et specielt Tilfælde af det ovenfor omtalte Problem er bleven ledet til Værdien af et bestemt Integral. Denne Undersøgelse har jeg tilføiet i Slutningen af Noten.

Betegnes Sandsynligheden for, at A vil vinde Partiet, naar han paa et vist Stadium i Spillet ejer x Jetons og endnu har y Spil tilbage for at naae op til de n Spil, ved $u_{x,y}$, saa vil denne Sandsynlighed efter et paafølgende Spil forandres enten til

$$u_{x+1,\,y-1} \quad \text{eller} \quad u_{x-1,\,y-1}$$

eftersom A vinder eller taber dette enkelte Spil, og da p og q ere de resp. Sandsynligheder for disse to Begivenheder, har man efter et bekjendt Princip i Sandsynlighedsregningen, Differensligningen

$$u_{x,\,y} = p\,u_{x+1,\,y-1} + q\,u_{x-1,\,y-1} \tag{1}$$

til Bestemmelsen af den søgte Sandsynlighed.

Efter Opgavens Beskaffenhed maa man endvidere have

$$\left.\begin{aligned} &u_{0,\,y} = 0, \qquad u_{a+b,\,y} = 1 \\ \text{og} \\ &u_{x,\,0} = 0 \text{ for } x = 0, 1, 2, 3 \ldots. (a+b-1). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Problemets Løsning er saaledes reduceret til at integrere Differensligningen (1) under Betingelserne (2).

Antages nu, at der til (1) svarer et partikulært Integral af Formen

$$u_{x,\,y} = \alpha^x \beta^y, \tag{3}$$

hvor α og β ere to ubekjendte Konstanter, som ifølge (1) alene er underkastet Betingelsen

$$\alpha\beta = p\,\alpha^2 + q, \tag{4}$$

og tænkes dernæst α^x udviklet i en endelig Række af Formen

$$\alpha^x = X_0 + X_1\beta + X_2\beta^2 + \ldots + X_x\beta^x + (X_0' + X_1'\beta + X_2'\beta^2 + \ldots + X'_{x-1}\beta^{x-1})\alpha, \tag{5}$$

hvor X_0, X_1, X_2 ... X_x, X_0', X_1', X_2' ... X'_{x-1} ere rationale Funktioner af x, p og q, saa faaer man ved at multiplicere denne Række med β^y

$$u_{x,y} = X_0 u_{0,y} + X_1 u_{0,y+1} + X_2 u_{0,y+2} + \ldots + X_x u_{0,y+x} + X_0' u_{1,y} + X_1' u_{1,y+1} + \ldots \\ + X'_{x-1} u_{1,y+x-1} \tag{6}$$

Af (4) erholdes

$$\alpha = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4pq}}{2p} = \begin{cases} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{cases}. \tag{7}$$

Sættes dernæst i (5)

$$\left.\begin{aligned} P_x &= X_0 + X_1\beta + X_2\beta^2 + \ldots + X_x\beta^x \\ \text{og} \\ Q_x &= X_0' + X_1'\beta + X_2'\beta^2 + \ldots + X'_{x-1}\beta^{x-1}, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

har man ifølge (7) og (5) Ligningerne

$$\alpha_1^x = P_x + Q_x\alpha_1,$$
$$\alpha_2^x = P_x + Q_x\alpha_2,$$

som give

$$Q = \frac{\alpha_1{}^x - \alpha_2{}^x}{\alpha_1 - \alpha_2} = p\,\frac{(\beta + \sqrt{\beta^2 - 4pq})^x - (\beta - \sqrt{\beta^2 - 4pq})^x}{2^x p^x \sqrt{\beta^2 - 4pq}}. \quad (9)$$

Gaae vi tilbage til (6), see vi, at den første Integrationsbetingelse (2) forandrer denne Ligning til

$$u_{x,y} = X_0{}' u_{1,y} + X_1{}' u_{1,y+1} + X_2{}' u_{1,y+2} + \ldots + X'_{x-1} u_{1,y+x-1},$$

og sættes heri

$$u_{1,y} = \frac{1}{K} - v_y,$$

hvor K er en Konstant, der nærmere maa bestemmes, faaer man

$$u_{x,y} = \frac{X_0{}' + X_1{}' + X_2{}' + \ldots + X'_{x-1}}{K} - X_0{}' v_y - X_1{}' v_{y+1}$$
$$- X_2{}' v_{y+2} - \ldots - X'_{x-1} v_{y+x-1}; \quad (10)$$

men ifølge den anden Integrationsbetingelse (2) forandres (10) til

$$1 = \frac{A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_{a+b-1}}{K} - A_0 v_y - A_1 v_{y+1} - A_2 v_{y+2}$$
$$- A_3 v_{y+3} - \ldots - A_{a+b-1} v_{y+a+b-1}, \quad (11)$$

idet A er benyttet som Betegnelse for X', naar heri x forandres til $a + b$, saa at man ved at bestemme Konstanten K saaledes, at

$$K = A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_{a+b-1}, \quad (12)$$

faaer Differensligningen

$$A_0 v_y + A_1 v_{y+1} + A_2 v_{y+2} + \ldots + A_{a+b-1} v_{y+a+b-1} = 0 \quad (13)$$

til Bestemmelsen af v_y.

Sættes paa sædvanlig Maade i (13)

$$v_y = \beta^y,$$

hvor β er en ubekjendt Konstant, der nærmere maa bestemmes, faaer man

$$A_0 + A_1 \beta + A_2 \beta^2 + \ldots + A_{a+b-1} \beta^{a+b-1} = 0. \quad (14)$$

Betegnes Rødderne i denne algebraiske Ligning ved

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots \beta_{a+b-1}, \quad (15)$$

og erindres tillige, at A_0, A_1, A_2, ... A_{a+b-1} ere Værdierne af $X_0{}'$ $X_1{}'$ X_2, ... X'_{x-1}, naar x forandres til $a + b$, saa seer man let, at Ligning (14) er ensbetydende med den Ligning, som fremkommer af den anden Formel (8), naar man heri forandrer

x til $a+b$ og derefter sætter høire Side lig med Nul, hvoraf følger, at man har Ligningen

$$Q_{a+b} = 0 \tag{16}$$

til Bestemmelsen af Rødderne (15).

Naar man dernæst i (9) sætter

$$\beta = 2\sqrt{pq}\cos\theta, \tag{17}$$

faaes

$$Q_x = \left(\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^{x-1} \frac{\sin x\theta}{\sin\theta} \tag{18}$$

og (16) forandres derved til

$$\frac{\sin(a+b)\theta}{\sin\theta} = 0; \tag{19}$$

men heraf findes

$$\theta = \frac{(r+1)\pi}{a+b}$$

for

$$r = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots.\ (a+b-2),$$

og man har altsaa ifølge (17) ganske i Almindelighed

$$\beta_{r+1} = 2\sqrt{pq}\cos\frac{(r+1)\pi}{a+b}. \tag{20}$$

Da fremdeles det fuldstændige Integral af Differensligningen (13) kan fremstilles ved

$$v_y = C_1\beta_1^y + C_2\beta_2^y + C_3\beta_3^y + \ldots + C_{a+b-1}\beta^y{}_{a+b-1},$$

hvor C_1, C_2, C_3, ... C_{a+b-1} ere arbitrære Konstanter, kan (10) omskrives til

$$u_{x,y} = \frac{X_0' + X_1' + X_2' + \ldots + X'_{x-1}}{K} - \sum_0^{a+b-2} C_{r+1}\, Q_x^{(r+1)}\beta_{r+1}^y, \tag{21}$$

idet Σ tages med Hensyn til r og

$$Q_x^{(r+1)} = \left(\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^{x-1} \frac{\sin\dfrac{(r+1)x\pi}{a+b}}{\sin\dfrac{(r+1)\pi}{a+b}} \tag{22}$$

Ifølge den anden Ligning (8) er

$$X_0' + X_1' + X_2' + \ldots + X'_{x-1}$$

Værdien af Q_x for $\beta = 1$. Denne Værdi for β giver ifølge (7)

$$\alpha_1 = \frac{q}{p} \text{ og } \alpha_2 = 1,$$

og da fremdeles K er Værdien af Q_{a+b} for $\beta = 1$, kan (21) omdannes til

$$u_{x,y} = \frac{p^x - q^x}{p^x} \cdot \frac{p^{a+b}}{p^{a+b} - q^{a+b}}$$

$$- 2^y (\sqrt{pq})^y \left(\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^{x-1} \sum_0^{a+b-2} C_{r+1} \frac{\sin\frac{(r+1)x\pi}{a+b} \cos^y \frac{(r+1)\pi}{a+b}}{\sin\frac{(r+1)\pi}{a+b}} \tag{23}$$

Anvendes nu den tredie Integrationsbetingelse (2) til Bestemmelsen af C_{r+1}, og sættes i denne Hensigt for Kortheds Skyld

$$\frac{p^{a+b}}{p^{a+b} - q^{a+b}} = \eta \text{ og } \sqrt{\frac{p}{q}} \cdot \frac{C_{r+1}}{\eta \sin\frac{(r+1\pi}{a+b}} = \xi_{r+1}, \tag{24}$$

faaer man af (23)

$$\xi_1 \sin\frac{x\pi}{a+b} + \xi_2 \sin\frac{2x\pi}{a+b} + \xi_3 \sin\frac{3x\pi}{a+b} + \ldots + \xi_{r+1} \sin\frac{(r+1)x\pi}{a+b} +$$

$$\ldots + \xi_{a+b-1} \sin\frac{(a+b-1)x\pi}{a+b} = \left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^x\right)\left(\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^x,$$

som for

$$x = 0, 1, 2, 3 \ldots\ldots (a+b-1)$$

giver følgende System af Ligninger

$$\left.\begin{aligned}
&\xi_1 \sin\frac{\pi}{a+b} + \xi_2 \sin\frac{2\pi}{a+b} + \ldots + \xi_{a+b-1} \sin\frac{(a+b-1)\pi}{a+b} \\
&\qquad = \sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}} \\
&\xi_1 \sin\frac{2\pi}{a+b} + \xi_2 \sin\frac{4\pi}{a+b} + \ldots + \xi_{a+b-1} \sin\frac{2(a+b-1)\pi}{a+b} \\
&\qquad = \left(\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\xi_1 \sin\frac{(a+b-1\pi}{a+b} + \xi_2 \sin\frac{2(a+b-1)\pi}{a+b} + \ldots + \xi_{a+b-1} \sin\frac{(a+b-1)(a+b-1)\pi}{a+b} \\
&\qquad = \left(\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^{a+b-1} \left(\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^{a+b-1}
\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

til Bestemmelsen af Størrelserne

$$\xi_1\,,\ \xi_2\,,\ \xi_3\,\ldots\ldots\,\xi_{a+b-1}$$

Efter en Methode af Lagrange, som er optaget i 2den Udgave af Todhunters Integral Calculus p. 266, kan man af Ligningerne (25) uden Vanskelighed finde

$$\xi_{r+1}=\frac{2}{a+b}\left\{\begin{array}{l}\sqrt{\frac{p}{q}}\sin\frac{(r+1)\pi}{a+b}+\left(\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^2\sin\frac{2(r+1)\pi}{a+b}+\ldots\\ \qquad+\left(\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^{a+b-1}\sin\frac{(r+1)(a+b-1)\pi}{a+b}\\ -\left(\sqrt{\frac{q}{p}}\sin\frac{(r+1)\pi}{a+b}+\left(\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2\sin\frac{2(r+1)\pi}{a+b}+\ldots\right.\\ \qquad\left.+\left(\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^{a+b-1}\sin\frac{(r+1)(a+b-1)\pi}{a+b}\right)\end{array}\right\}$$

og naar Rækkerne opsummeres (jfr. Ramus's Trigonometri pag: 15), faaer man

$$\xi_{r+1}=\frac{2}{a+b}\,\frac{p^{a+b}-q^{a+b}}{(\sqrt{pq})^{a+b-1}}\,\frac{\sin\frac{(r+1)(a+b-1)\pi}{a+b}}{1-2\sqrt{pq}\cos\frac{(r+1)\pi}{a+b}}\,, \tag{26}$$

som i Forbindelse med (24) giver C_{r+1}; men det vil være bekvemmere at eliminere C_{r+1} af (23) ved Hjælp af Udtrykket for $\eta\,\xi_{r+1}$, som ifølge (24) og (26) bliver

$$\eta\,\xi_{r+1}=\sqrt{\frac{p}{q}}\cdot\frac{C_{r+1}}{\sin\frac{(r+1)\pi}{a+b}}=\frac{2}{a+b}\left(\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^{a+b}\frac{\sqrt{pq}\,(-1)^r\sin\frac{(r+1)\pi}{a+b}}{1-2\sqrt{pq}\cos\frac{(r+1)\pi}{a+b}}\cdot$$

Herved forandres (23) til

$$\left.\begin{array}{l}u_{x,y}=\frac{p^x-q^x}{p^x}\cdot\frac{p^{a+b}}{p^{a+b}-q^{a+b}}\\ -\frac{2^{y+1}}{a+b}(\sqrt{pq})^{y+1}\left(\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^{a+b-x}\sum_0^{a+b-2}\frac{(-1)^r\sin\frac{(r+1)\pi}{a+b}\sin\frac{(r+1)x\pi}{a+b}\cos^y\frac{(r+1)\pi}{a+b}}{1-2\sqrt{pq}\cos\frac{(r+1)\pi}{a+b}}\end{array}\right\} \tag{27}$$

For nu at komme til Opgavens endelige Løsning behøver man blot at forandre x til a og y til $b+2i$, idet Spilleren A

for at vinde alle Jetons fra B nødvendigvis maa vinde et Antal af $b+2i$ Spil, naar i betegner Antallet af de Spil, som han har tabt, og da man tillige har

$$\sin\frac{(r+1)a\pi}{a+b} = (-1)^r \sin\frac{(r+1)b\pi}{a+b},$$

faaes af (27)

$$\left.\begin{aligned} u_{a,b+2i} &= \frac{p^b(p^a-q^a)}{p^{a+b}-q^{a+b}} \\ &- \frac{2^{b+2i+1}(\sqrt{pq})^{2i+1}p^b}{a+b}\sum_0^{a+b-2}\frac{\sin\frac{(r+1)\pi}{a+b}\sin\frac{(r+1)b\pi}{a+b}\cos^{b+2i}\frac{(r+1)\pi}{a+b}}{1-2\sqrt{pq}\cos\frac{(r+1)\pi}{a+b}} \end{aligned}\right\}. \quad (28)$$

Multipliceres dernæst Tæller og Nævner under Summationstegnet med

$$1+2\sqrt{pq}\cos\frac{(r+1)\pi}{a+b},$$

forandres (28) til

$$\left.\begin{aligned} u_{a,b+2i} &= \frac{p^b(p^a-q^a)}{p^{a+b}-q^{a+b}} \\ &- \frac{2^{b+2i+1}(\sqrt{pq})^{2i+1}p_b}{a+b}\sum_0^{a+b-2}\frac{\sin\frac{(r+1)\pi}{a+b}\sin\frac{(r+1)b\pi}{a+b}\cos^{b+2i}\frac{(r+1)\pi}{a+b}}{p^2-2pq\cos\frac{2(r+1)\pi}{a+b}+q^2} \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

idet

$$\sum_0^{a+b-2}\frac{\sin\frac{(r+1)\pi}{a+b}\sin\frac{(r+1)b\pi}{a+b}\cos^{b+2i}\frac{(r+1)\pi}{a+b}}{p^2-2pq\cos\frac{2(r+1)\pi}{a+b}+q^2} = 0;$$

thi naar r er et ulige Tal vil denne Række komme til at bestaae af et lige Antal Led, af hvilke det første og det sidste, det andet og det næstsidste o. s. v. Led blive ligestore med modsatte Fortegn. Er r derimod et lige Tal vil Rækken komme til at bestaae af et ulige Antal Led; men i dette Tilfælde vil det midterste Led altid være Nul og de øvrige Led forsvinde paa samme Maade som, naar r er et ulige Tal.

Da man fremdeles har

$$\sin\frac{(a+b-(r+1))\pi}{a+b} = \sin\frac{(r+1)\pi}{a+b}$$

$$\cos\frac{(a+b-(r+1))\pi}{a+b} = -\cos\frac{(r+1)\pi}{a+b}$$

$$\cos\frac{2(a+b-(r+1))\pi}{a+b} = \cos\frac{2(r+1)\pi}{a+b}$$

$$\sin\frac{(a+b-(r+1))b\pi}{a+b} = (-1)^{b+1}\sin\frac{(r+1)b\pi}{a+b}$$

indses uden Vanskelighed, at (29) ogsaa kan omskrives til

$$\left.\begin{aligned} u_{a,b+2i} &= \frac{p^b(p^a-q^a)}{p^{a+b}-q^{a+b}} \\ &-\frac{2^{b+2i+2}(pq)^{i+1}p^b}{a+b}\sum\frac{\sin\frac{2(r+1)\pi}{a+b}\sin\frac{(r+1)b\pi}{a+b}\cos^{b+2i}\frac{(r+1)\pi}{a+b}}{p^2-2pq\cos\frac{2(r+1)\pi}{a+b}+q^2}\end{aligned}\right\} \quad (30)$$

hvor Σ tages med Hensyn til r fra $r=0$ til $r=\frac{a+b-2}{2}$, naar $a+b$ er et lige Tal, og fra $r=0$ til $r=\frac{a+b-1}{2}$, naar $a+b$ er et ulige Tal, som stemmer nøiagtigt med det af Laplace fundne Resultat.

Vi skulle nu gaae over til at vise, hvorledes et specielt Tilfælde af det ovenfor fundne Resultat (30) har givet Anledning til at udlede Værdien af et bestemt Integral.

Sættes i (30)

$$\frac{r+1}{a}\pi = \varphi,\quad \frac{\pi}{a} = \triangle\varphi \text{ og } u_{a,b+2i} = y,$$

faaer man for

$$a = \infty \text{ og } p \geqq q$$

følgende Udtryk

$$y = 1 - \frac{2^{b+2i+2}p^b(pq)^{i+1}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{b+2i}\varphi\sin b\varphi\sin 2\varphi d\varphi}{p^2-2pq\cos 2\varphi+q^2}. \quad (31)$$

Er $p < q$ behøver man blot at ombytte Tallet 1 paa høire Side af Lighedstegnet med $\left(\frac{p}{q}\right)^b$. (Jfr. Théorie analytique des Prob. pag. 235).

Men for $a = \infty$ kan Løsningen af den ovenfor omtalte Opgave ogsaa, saaledes som Laplace har vist, udtrykkes ved

$$\left.\begin{array}{l} y = p^b \Big(1 + b p q + \frac{b(b+3)}{1.2} p^2 q^2 + \ldots \\ \quad + \frac{b(b+i+1)(b+i+2)\ldots(b+2i-1)}{1.2.3\ldots i} p^i q^i\Big), \end{array}\right\} \quad (32)$$

et Resultat, som oprindelig skyldes De Moivre; men som forøvrigt er tilstrækkelig bekjendt (jfr. t. Ex. Laurent Traité du Calcul des Probabilités pag. 85. Paris 1873.)

Ved Hjælp af følgende bestemte Integral

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\mu}\varphi \cos(m-n)\varphi\, d\varphi = \frac{[\mu]}{[m][n]} \cdot \frac{1}{2^{\mu}}, \quad (33)$$

hvor $\mu = m + n$ og $[v] = 1.2.3\ldots v$, og som skyldes Poisson (Journal de l'Ecole Polytechnique, 19 cahier page 490), kan Rækken (32) udtrykkes ved en Sum af to bestemte Integraler.

Skrives nemlig (32) under Formen

$$y = p^b \sum_0^i \frac{b}{b+2i} \frac{[b+2i]}{[b+i][i]} p^i q^i \quad (34)$$

og sættes dernæst

$$\mu = b + 2i, \quad m = b + i \text{ og } n = i,$$

faaer man af (33)

$$\frac{2^{b+2i+1} b}{\pi(b+2i)} p^i q^i \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{b+2i}\varphi \cos b\varphi\, d\varphi = \frac{b}{b+2i} \frac{[b+2i]}{[b+i][i]} p^i q^i \quad (35)$$

Men ved delvis Integration har man

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{b+2i-1}\varphi \sin b\varphi \sin\varphi\, d\varphi = \frac{2}{\pi}\frac{b}{b+2i}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{b+2i} \cos b\varphi\, d\varphi, \quad (36)$$

saa at y nu ifølge (35) og (36) kan omdannes til

$$y = \frac{2^{b+1}p^b}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sum_0^i 2^{2i}p^iq^i\cos^{2i}\varphi\right)\cos^{b-1}\varphi\sin b\varphi\sin\varphi\,d\varphi. \quad (37)$$

Fremdeles har man

$$\sum_0^i 2^{2i}p^iq^i\cos^{2i}\varphi = \frac{1-2^{i+2}p^{i+1}q^{i+1}\cos^{2i+2}\varphi}{1-4pq\cos^2\varphi}$$
$$= \frac{1-2^{2i+2}p^{i+1}q^{i+1}\cos^{2i+2}\varphi}{p^2-2pq\cos 2\varphi+q^2},$$

hvorved (37) forandres til

$$y = \frac{2^{b+1}p^b}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-2^{2i+2}(pq)^{i+1}\cos^{2i+2}\varphi}{p^2-2pq\cos 2\varphi+q^2}\cos^{b-1}\varphi\sin b\varphi\sin\varphi\,d\varphi$$

eller, hvad der er det samme,

$$y = \frac{2^{b+1}p^b}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{b-1}\sin b\varphi\sin\varphi\,d\varphi}{p^2-2pq\cos 2\varphi+q^2}$$

$$-\frac{2^{b+2i+2}p^b(pq)^{i+1}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{b+2i}\varphi\sin b\varphi\sin 2\varphi\,d\varphi}{p^2-2pq\cos 2\varphi+q^2};$$

Sammenlignes dette Udtryk for y med (31), sees, at man maa have

$$\frac{2^{b+1}p^b}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{b-1}\varphi\sin b\varphi\sin\varphi\,d\varphi}{p^2-2pq\cos^2\varphi+q^2} = 1 \text{ eller } = \left(\frac{p}{q}\right)^b$$

eftersom $p \geqq q$ eller $p < q$, og man kan altsaa heraf udlede følgende Resultat.

Ere p og q to positive Tal bundne til Relationen

$$p+q = 1,$$

saa har man

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{b-1}\varphi \sin b\varphi \sin\varphi \, d\varphi}{p^2 - 2pq\cos 2\varphi + q^2} = \frac{\pi}{2^{b+1}} \cdot \frac{1}{p^b},$$

naar tillige $p \geqq q$. Tilfældet $p < q$ faaes ved ligefrem at ombytte p og q.

$p = q$ giver

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{b-1}\varphi \sin b\varphi \, d\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\pi}{2}$$

for alle positive Værdier af b med Undtagelse af $b = 0$.

Dette sidste Resultat er fundet ad anden Vei i Schlömilchs: «Analytische Studien» p. 80. Leipzig 1848.